NOM :…………………………………………………………….

PRENOM :……………………………………………………….

NUMERO APB :…………………………………………….

EPREUVE DE

MATHEMATIQUES

DUREE : 1h30

Coefficient 5

CONSIGNES SPECIFIQUES

Lisez attentivement les consignes afin de vous placer dans les meilleures conditions de réussite de cette épreuve.
Cette épreuve comporte volontairement plus d'exercices que vous ne pouvez en traiter dans le temps imparti.
La raison en est que votre enseignant n'a pas forcément traité l'ensemble du programme de Terminale S.

Vous devez répondre à 45 questions au choix parmi les 60 proposées pour obtenir la note maximale.
Si vous traitez plus de 45 questions, seules les 45 premières seront prises en compte.

Aucun brouillon n'est distribué. Les pages blanches de ce sujet peuvent être utilisées à l'usage de brouillon.
L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique est interdit.
Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé.

Attention, il ne s'agit pas d'un examen mais bien d'un concours qui aboutit à un classement.
Si vous trouvez ce sujet « difficile », ne vous arrêtez pas en cours de composition, n'abandonnez pas, restez concentré(e).
Les autres candidats rencontrent probablement les mêmes difficultés que vous !

Barème :

Une seule réponse exacte par question. Afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, **chaque réponse exacte est gratifiée de 3 points**, tandis que **chaque réponse fausse est pénalisée par le retrait d'1 point.**

Raisonnement

Pour les questions 1 à 5 on considère une opération notée $\oplus$ et définie par :
Pour tous réels a et b on a : $a \oplus b = a + 2 \times a \times b + b$, où + et × désignent respectivement l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.

Question 1 : $(-2) \oplus \left(5 \oplus \frac{1}{2}\right) =$

a : $\frac{-59}{2}$

b : $\frac{109}{2}$

c : $\frac{-67}{2}$

d : $\frac{101}{2}$

Question 2 : Parmi les 4 propositions suivantes, laquelle est vraie ?
a : Si $a > -1$ alors $a \oplus a \geq 0$.
b : Si $a < -1$ alors $a \oplus a \geq 0$.
c : Si $a < 0$ alors $a \oplus a \leq 0$.
d : Si $a < 0$ alors $a \oplus a \geq 0$.

Question 3 : On dit que l'opération $\oplus$ admet pour élément neutre le nombre réel noté n_e si pour tout réel a on a :
$a \oplus n_e = n_e \oplus a = a$. Alors
a : $n_e = 0$
b : $n_e = 1$
c : $n_e = -1$
d : n_e est égal à une autre valeur que les trois proposées aux réponses précédentes

Question 4 : On dit qu'un nombre réel a admet pour symétrique pour l'opération $\oplus$ le nombre noté $\tilde{a}$ si
$a \oplus \tilde{a} = \tilde{a} \oplus a = n_e$, où n_e est le nombre défini à la question 3. S'il existe, alors $\tilde{a} =$
a : $(-1) \times a$
b : $\frac{2a-1}{a}$
c : $\frac{-1}{a}$
d : $\frac{-a}{1+2a}$

Question 5 : Dans $\mathbb{R}$, l'équation $a \oplus 1 = a \times a$ admet
a : aucune solution
b : exactement une solution
c : exactement deux solutions
d : un nombre de solutions qui dépend de la valeur de a

Algorithmique

Pour les questions 6 à 9, on considère l'algorithme suivant :

Variables :
    I , N , U : nombres
Traitement :
    Saisir un entier N
    Saisir un nombre U
    Affecter à I la valeur 0
    Tant que $I < N$ faire
        Affecter à I la valeur $I + 1$
        Affecter à U la valeur $U + \frac{1}{2}(I \times U)$
    Fin du tant que
    Afficher U

Question 6 : Si on fait fonctionner l'algorithme avec $N = 3$ et $U = 2$, on obtient comme affichage
a : 15
b : 4
c : 6
d : Aucune des réponses précédentes n'est exacte.

Question 7 : Si on désire remplacer la boucle « tant que » par une boucle « répéter » on doit écrire
a : Répéter
Affecter à I la valeur $I + 1$
Affecter à U la valeur $U + \frac{1}{2}(I \times U)$
Jusqu'à $I < N$
b : Répéter
Affecter à I la valeur $I + 1$
Affecter à U la valeur $U + \frac{1}{2}(I \times U)$
Jusqu'à $I = N - 1$
c : Répéter
Affecter à I la valeur $I + 1$
Affecter à U la valeur $U + \frac{1}{2}(I \times U)$
Jusqu'à $I > N$
d : Aucune des réponses précédentes n'est exacte.

Question 8 : Si on désire remplacer la boucle « tant que » par une boucle « pour » on doit écrire
a : Pour I allant de 0 à N par pas de 1
Affecter à I la valeur $I + 1$
Affecter à U la valeur $U + \frac{1}{2}(I \times U)$
Fin du pour
b : Pour I allant de 0 à $N - 1$ par pas de 1
Affecter à I la valeur $I + 1$
Affecter à U la valeur $U + \frac{1}{2}(I \times U)$
Fin du pour
c : Pour I allant de 1 à N par pas de 1
Affecter à I la valeur $I + 1$
Affecter à U la valeur $U + \frac{1}{2}(I \times U)$
Fin du pour
d : Aucune des réponses précédentes n'est exacte.

Question 9 : La variable U contient les termes successifs de la suite (u_n) définie par
a : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{n \times u_n}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
b : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{n \times u_{n-1}}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
c : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{(n-1) \times u_{n-1}}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
d : Aucune des réponses précédentes n'est exacte.

Suites

Question 10 : On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 4, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$, alors $u_{23} =$
a : 119
b : 85
c : 97
d : 111

Question 11 : On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{(-1)^n \times E(\frac{n}{3})}{n^2+n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x, alors
a : (u_n) n'est ni minorée, ni majorée.
b : (u_n) est minorée mais pas majorée.
c : (u_n) est majorée mais pas minorée.
d : (u_n) est bornée.

Question 12 : On considère une suite (u_n) arithmétique de raison 3 et une suite (v_n) arithmétique de raison 2, alors la suite (w_n) définie par $w_n = u_n + v_n$ pour tout n $\in \mathbb{N}$ est
a : arithmétique de raison 6.
b : géométrique de raison 5.
c : arithmétique de raison $\frac{5}{2}$.
d : arithmétique de raison 5.

Question 13 : On considère une suite (u_n) géométrique de raison 3 et une suite (v_n) géométrique de raison 2, alors la suite (w_n) définie par $w_n = u_n \times v_n$ pour tout n $\in \mathbb{N}$ est
a : géométrique de raison 6.
b : géométrique de raison 5.
c : géométrique de raison 9.
d : géométrique de raison 8.

Question 14 : On considère une suite (u_n) géométrique de raison 3 et une suite (v_n) géométrique de raison 2, alors la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{u_n+v_n}{2}$ pour tout n $\in \mathbb{N}$ est
a : géométrique de raison $\frac{5}{2}$.
b : arithmétique de raison $\frac{5}{2}$.
c : arithmétique de raison $\frac{9}{2}$.
d : ni arithmétique, ni géométrique.

<u>Nombres complexes</u>

Question 15 : On considère le nombre complexe $z = 3i$, alors $z^4 =$
a : $81i$
b : -81
c :$-81i$
d : 81

Question 16 : Les nombres réels a et b tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$z^3 + (2-i)z^2 + (1-2i)z - i = (z-i)(z^2+az+b)$ sont
a : $a = -2$ et $b = 1$
b : $a = -2$ et $b = -1$
c : $a = 2$ et $b = 1$
d : $a = 2$ et $b = -1$

Question 17 : $\frac{e^{\frac{i\pi}{2}}(6e^{i\pi}+2)}{2i} =$
a : -2
b : $2+i$
c : 0
d : 2

Question 18 : On considère le nombre complexe $z = \frac{2+2i}{\sqrt{3}+i}$, alors un argument, à 2π près, de z est

a : $\frac{-\pi}{12}$

b : $\frac{\pi}{12}$

c : $\frac{5\pi}{12}$

d : $\frac{-5\pi}{12}$

Question 19 : On considère le nombre complexe $z = \sqrt{5}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$, alors un argument, à 2π près, de la moyenne arithmétique de z et de son conjugué est :

a : 0

b : $\frac{\pi}{2}$

c : π

d : $\frac{3\pi}{2}$

Question 20 : On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, l'affixe du vecteur $\vec{w} = 5\vec{u} - 5\sqrt{3}\vec{v}$ est

a : $10e^{\frac{i\pi}{3}}$

b : $5e^{\frac{-i\pi}{3}}$

c : $\sqrt{5}e^{\frac{-i\pi}{3}}$

d : $10e^{\frac{-i\pi}{3}}$

Question 21 : On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, les images des solutions de l'équation $z^4 = 6$ sont

a : les sommets d'un triangle équilatéral.

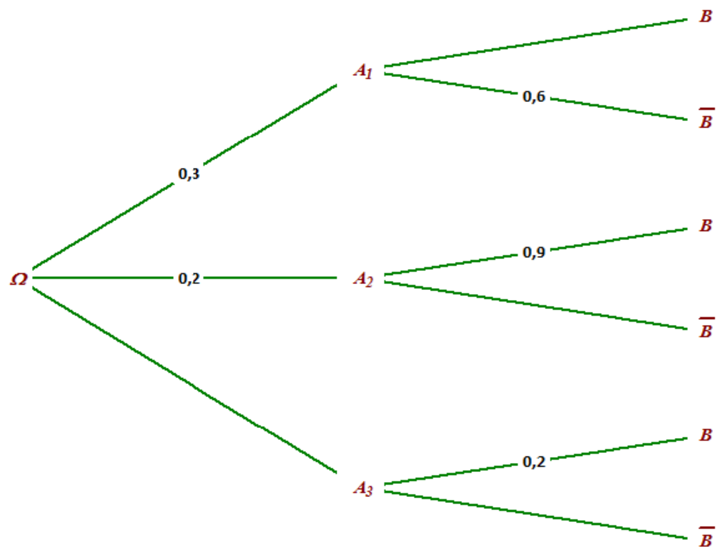
b : les sommets d'un carré.

c : les sommets d'un pentagone régulier.

d : les sommets d'un hexagone régulier.

<u>Probabilités conditionnelles</u>

Pour les questions 22 à 24, on considère l'arbre pondéré suivant :



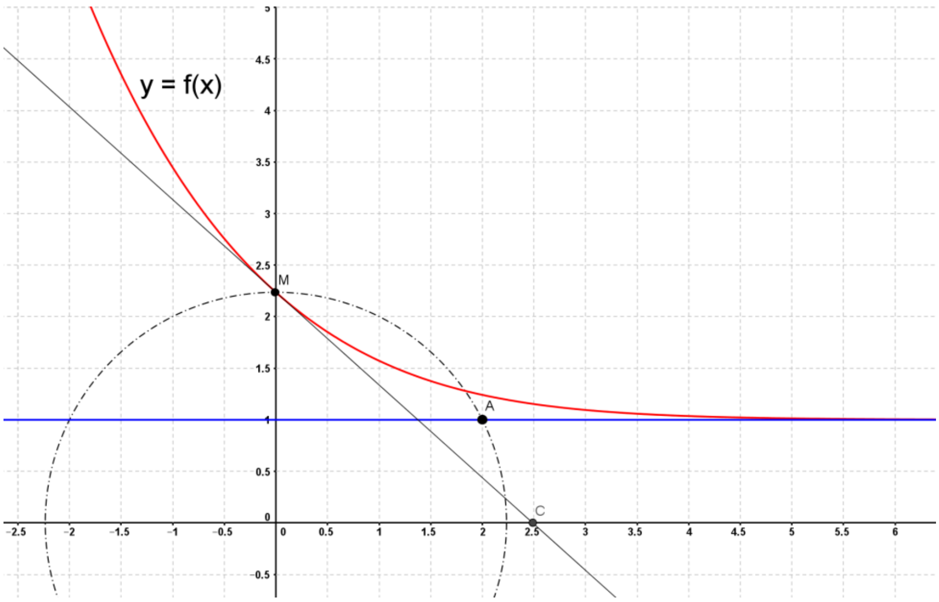
Question 22 : $P(A_3) =$
a : 0,1
b : 0,2
c : 0,5
d : 0,4

Question 23 : $P(A_1 \cap B) =$
a : 0,1
b : 0,12
c : 0,18
d : 0,4

Question 24 : Les évènements A_1 et B sont
a : incompatibles.
b : certains.
c : dépendants.
d : indépendants.

Lecture graphique

Pour les questions 25 à 28, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. On a tracé la courbe représentative d'une fonction f dérivable et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Le point M est le point de la courbe d'abscisse 0. La droite (MC) avec $C\left(\frac{5}{2}; 0\right)$ est la tangente à la courbe au point d'abscisse 0. Le point M et le point A (2;1) sont situés sur le même cercle dont le centre est l'origine du repère.



Question 25 : La courbe représentative de f admet
a : la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.
b : la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.
c : la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote verticale en $+\infty$.
d : la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote verticale en $+\infty$.

Question 26 : La valeur exacte de $f(0)$ est
a : $\frac{21}{10}$
b : e
c : $\sqrt{5}$
d : $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Question 27 : Un vecteur directeur de la droite (MC) est

a : $\vec{u}\begin{pmatrix}-\sqrt{5}\\2\end{pmatrix}$

b : $\vec{u}\begin{pmatrix}-\sqrt{5}\\2\sqrt{5}\end{pmatrix}$

c : $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\-2\sqrt{5}\end{pmatrix}$

d : $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\2\sqrt{5}\end{pmatrix}$

Question 28 : La fonction représentée est $f(x) = \sqrt{1+\alpha e^{-x}}$ avec $\alpha =$

a : $\sqrt{3}$
b : $\sqrt{5}$
c : 4
d : $\frac{3}{2}$

Trigonométrie

Pour les questions 29 à 31, on considère la fonction cotangente notée $\text{cotan}(x)$ et définie par $\text{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Question 29 : $\text{cotan}(\frac{\pi}{4}) =$

a : 1
b : 0
c : $\sqrt{2}$
d : $\sqrt{3}$

Question 30 : La fonction cotangente n'est pas définie si

a : $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, où k est un nombre entier relatif

b : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, où k est un nombre entier relatif

c : $x = 2k\pi$, où k est un nombre entier relatif

d : $x = k\pi$, où k est un nombre entier relatif

Question 31 : Pour tout x appartenant à son domaine de définition, la fonction cotangente est dérivable et admet pour fonction dérivée

a : $1 + (\text{cotan}(x))^2$

b : $\frac{1}{(\sin(x))^2}$

c : $\frac{-1}{(\sin(x))^2}$

d : $\left(\text{cotan}(x)\right)^2 - 1$

Fonction exponentielle

Question 32 : $\frac{e^5 \times e^{-3}}{(e^3)^2} =$

a : e^{-3}
b : $e^{-\frac{15}{6}}$
c : e^{-4}
d : e^{9}

Question 33 : Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $e^{2x} + e^{x} - 2 = 0$ sont

a : -2 et 1
b : 0
c : e^{-2} et e^{1}
d : Aucune des réponses précédentes n'est juste.

Question 34 : $\lim_{x \to +\infty} \left(e^{\sqrt{x^3-3x+9}} \right) =$
a : $+\infty$
b : 0
c : $e^{\sqrt{x^3}}$
d : e^3

Question 35 : Pour tout nombre réel non nul x, $\frac{e^x}{x^4} =$
a : $\frac{e^{4y}}{16y^4}$, avec $y = 4x$
b : $\frac{1}{256} \times \left(\frac{e^y}{y}\right)^4$, avec $x = 4y$
c : $\frac{e^{4y}}{16y^4}$, avec $x = 4y$
d : $\frac{1}{64} \times \left(\frac{e^y}{y}\right)^4$, avec $x = 4y$

Question 36 : On considère la fonction f définie sur ℝ par : $f(x) = \cos(3x)e^{-2x}$.
La fonction dérivée de f en $x \in \mathbb{R}$ est
a : $f'(x) = -e^{-2x}(3\sin(3x) + 2\cos(3x))$
b : $f'(x) = -3e^{-2x}(\sin(3x) + \cos(3x))$
c : $f'(x) = -2e^{-2x}(\sin(3x) + \cos(3x))$
d : $f'(x) = -e^{-2x}(3\sin(3x) - 2\cos(3x))$

Question 37 : $\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{3x+2} - e^2}{x} \right) =$
a : $+\infty$
b : 0
c : $\frac{e^2}{3}$
d : $3e^2$

Fonction logarithme népérien

Question 38 : Dans ℝ, l'équation $\ln(x+3) + \ln(x+2) = 0$ admet
a : aucune solution.
b : une solution.
c : deux solutions.
d : Aucune des réponses précédentes n'est juste.

Question 39 : $\ln(8e^5) =$
a : $3\ln(2) + e^5$
b : $3\ln(2) + 5e$
c : $15\ln(2e)$
d : $5 + 3\ln(2)$

Question 40 : La fonction f définie sur ℝ par : $f(x) = \ln(\sqrt{1+3e^x} + e)$ est
a : strictement croissante sur ℝ.
b : strictement décroissante sur ℝ.
c : croissante sur $]-\infty\,;\ 0]$ puis décroissante sur $[0\,;\ +\infty[$.
d : décroissante sur $]-\infty\,;\ 0]$ puis croissante sur $[0\,;\ +\infty[$.

Question 41 : $\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{\ln(x-2)}{6-x-x^2} \right) =$
a : $-\infty$
b : 0
c : $+\infty$
d : Aucune des réponses précédentes n'est juste.

Question 42 : $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1+\ln(x)}{4x}\right) =$
a : $-\infty$
b : 0
c : $+\infty$
d : Aucune des réponses précédentes n'est juste.

Question 43 : Pour tout $x > 0$, l'équation $\frac{\ln(x+2)+3}{x} = 5$ est équivalente à
a : $x = \frac{e^{5x+3}}{2}$
b : $x = e^{5x-5}$
c : $x = e^{5x-3} - 2$
d : Aucune des réponses précédentes n'est juste.

Question 44 : Soit n un nombre entier naturel, l'inéquation $5 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \geq 3$ est équivalente à
a : $n \leq \frac{\ln(3)-\ln(5)}{\ln(3)-\ln(4)}$
b : $n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(3)-2\ln(2)}$
c : $n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(4)-\ln(3)}$
d : Aucune des réponses précédentes n'est juste.

Intégration

Question 45 : On se place dans le plan muni d'un repère et on considère la fonction f positive de courbe représentative $\mathcal{C}$, alors pour a et b réels tels que $a \leq b$, $\int_a^b f(x)dx$ est
a : l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, $\mathcal{C}$, les droites d'équations $y = a$ et $y = b$.
b : l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, $\mathcal{C}$, les droites d'équations $x = a$ et $y = b$.
c : l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, $\mathcal{C}$, les droites d'équations $y = a$ et $x = b$.
d : l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, $\mathcal{C}$, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Question 46 : $\int_0^2 (3e^x)dx =$
a : $3(e^2 - 1)$
b : $\frac{e^2-1}{3}$
c : $3(e^2 + 1)$
d : $\frac{e^2+1}{3}$

Question 47 : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, alors $\int_3^7 (2f(x) + 5)dx =$
a : $2\int_3^7 f(x)dx + 5$
b : $2\int_3^7 f(x)dx + 10$
c : $2\int_3^7 f(x)dx + 40$
d : Aucune des réponses précédentes n'est juste.

Question 48 : $\int_0^2 (e^{3x})dx =$
a : $3(e^6 - 1)$
b : $\frac{e^6-1}{3}$
c : $3(e^6 + 1)$
d : $\frac{e^6+1}{3}$

Géométrie dans l'espace

Pour les questions 49 à 52, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

Question 49 : On considère la droite (d) passant par $A\,(2\,;\,3\,;\,-1)$ et de vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ alors une représentation paramétrique de (d) est

a : $\begin{cases}x = 2 - t\\ y = 3 + 2t\\ z = -1 + t\end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

b : $\begin{cases}x = 2 + 2t\\ y = 3 - 1t\\ z = -1 + t\end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

c : $\begin{cases}x = 2 + 2t\\ y = -1 + 3t\\ z = 1 - t\end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

d : $\begin{cases}x = 4 + 2t\\ y = 6 - 1t\\ z = -2 + t\end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

Question 50 : On considère le plan P d'équation cartésienne $x - 2y + z + 1 = 0$, alors $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan P où

a : $A\ (1; 0; -2)$; $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}$

b : $A\ (1; 0; -2)$; $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

c : $A\ (1; 1; -2)$; $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$

d : Aucune des réponses précédentes n'est juste.

Question 51 : On considère le plan P d'équation cartésienne $2x + 3y + z + 2 = 0$ et la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases}x = 4 - 2t\\ y = 1 + t\\ z = 2 - t\end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$, alors

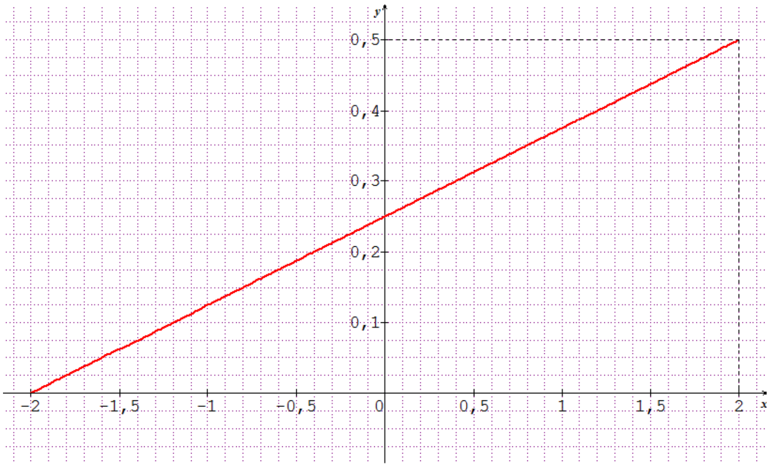
a : le plan P contient la droite (d).
b : le plan P ne contient pas la droite (d) et la droite (d) est parallèle au plan P.
c : le plan P et la droite (d) sont sécants et non perpendiculaires.
d : le plan P et la droite (d) sont perpendiculaires.

Question 52 : On considère le plan P d'équation cartésienne $x + 2y - z + 4 = 0$ et la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases}x = 1 - t\\ y = t\\ z = 2\end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$, alors (d) coupe P au point M de coordonnées

a : (4 ; -3 ; 1)
b : (4 ; -2 ; -4)
c : (1 ; -3 ; 2)
d : (4 ; -3 ; 2)

Loi de probabilités

Pour les questions 53 à 55, on considère une variable aléatoire continue X, à valeurs dans [-2 ; 2] dont la densité de probabilité est représentée ci-dessous.



Question 53 : $P(X \leq 0) =$
a : 0
b : 0,25
c : 0,125
d : 0,5

Question 54 : $P(-1{,}2 \leq X \leq 1{,}2) \approx$
a : 0,5
b : 0,6
c : 0,3
d : 0,9

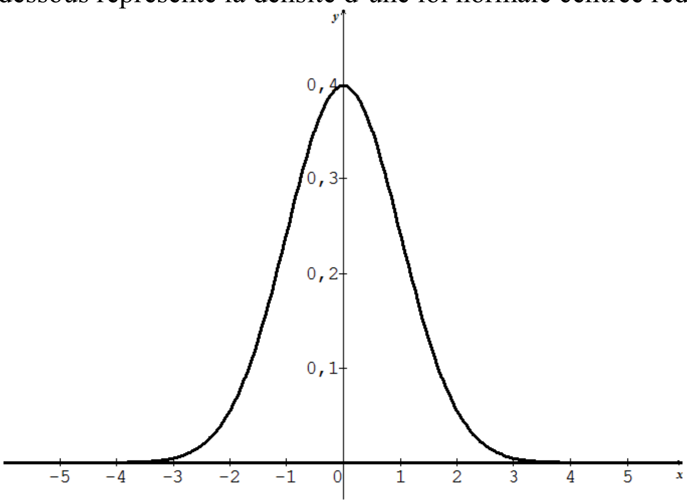
Question 55 : On a :
a : $E(X) = 0$
b : $-2 \leq E(X) < 0$
c : $0 < E(X) \leq 1{,}4$
d : $1{,}4 \leq E(X) \leq 2$

Loi Normale

Pour les questions 56 et 57, on considère une variable aléatoire Y = 2X où X est une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

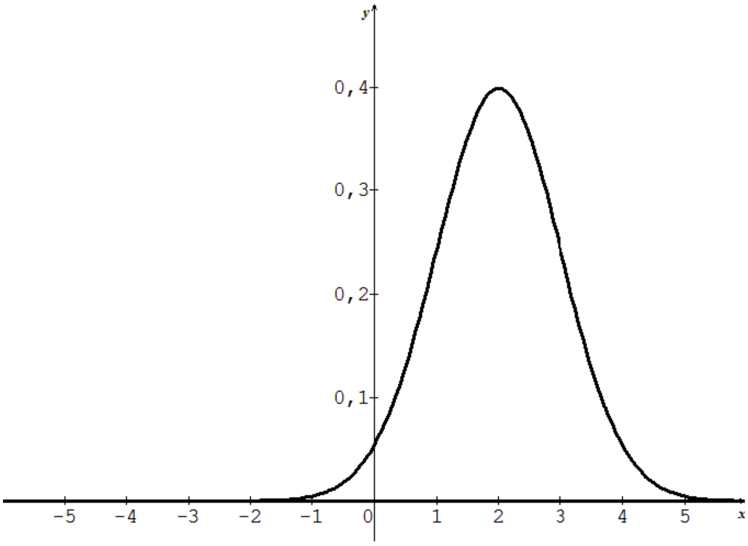
Question 56 : La variable Y
a : est plus dispersée que X.
b : est moins dispersée que X.
c : a la même dispersion que X.
d : on manque d'informations pour comparer les dispersions de X et Y.

Question 57 : Le graphique ci-dessous représente la densité d'une loi normale centrée réduite.

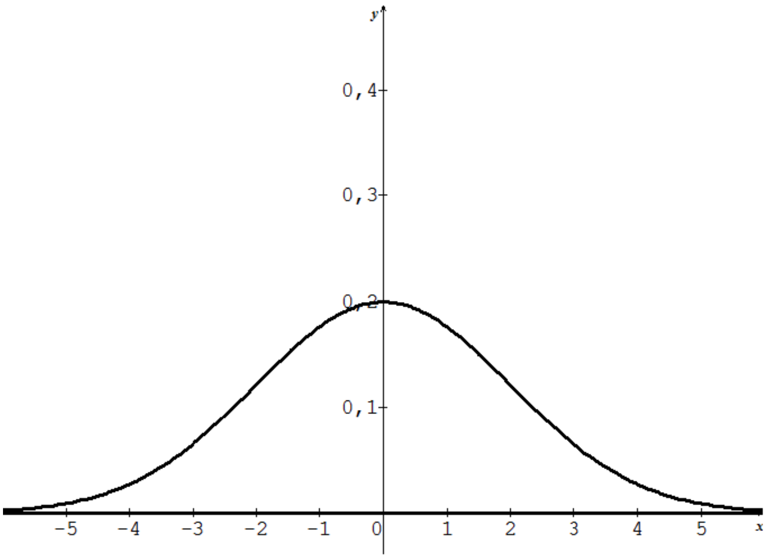


Alors, la densité de Y est

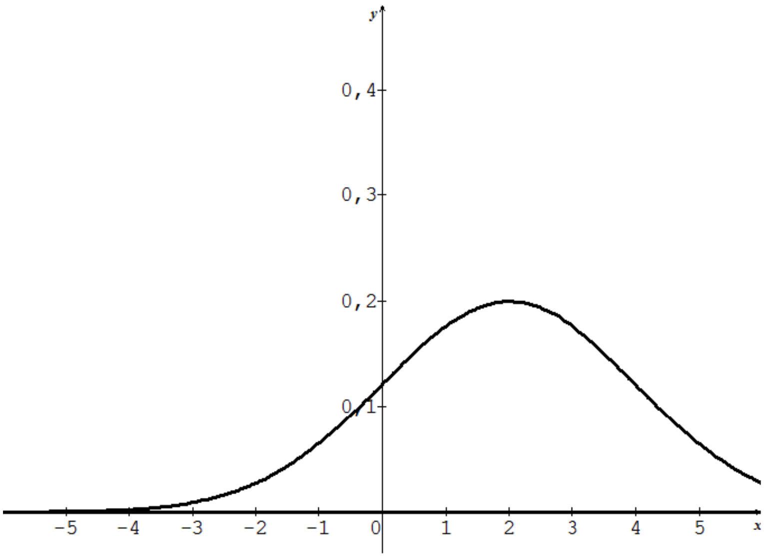
a :



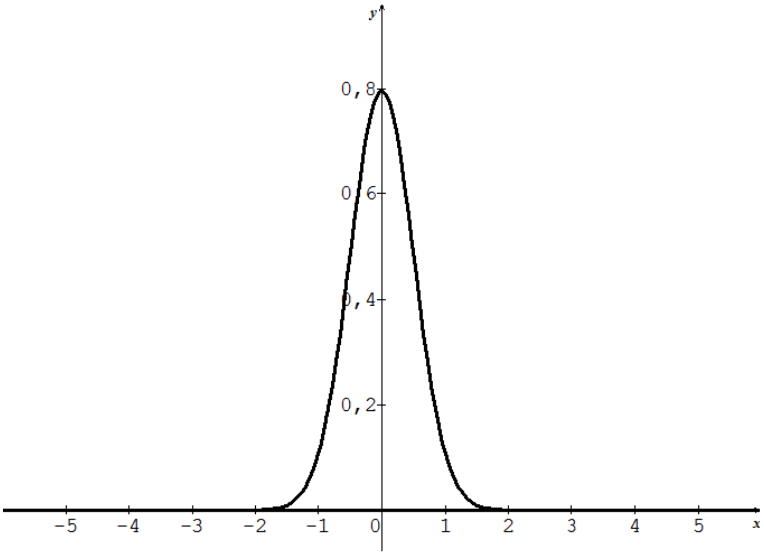
b :



c :



d :



Pour les questions 58 et 59, on considère une variable aléatoire Z qui suit une loi normale d'espérance 3 et d'écart type 2, on peut utiliser le tableau suivant :

k	$P(X \leq k)$ où X suit une loi normale centrée réduite.
0,25	0,60
0,5	0,69
0,75	0,77
1	0,84
1,25	0,89

Question 58 : $P(Z \leq 4) =$
a : 0,84
b : 0,69
c : 0,77
d : Aucune des réponses précédentes n'est juste.

Question 59 : $P(2 < Z \leq 5) =$
a : 0,14
b : 0,29
c : 0,77
d : 0,53

Statistiques

Question 60 : On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ avec $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ et $p \in [0;1]$.
On note $f = \frac{X}{n}$ la fréquence associée à X. Alors si n est assez grand, on a
a : $P\left(f - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < 0{,}68$
b : $P\left(f - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < 0{,}95$
c : $P\left(f - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}95$
d : Aucune des réponses précédentes n'est juste.

FIN